

波尔共振实验“异常现象”的研究

董霖^[备注] 王涵 指导老师：朱洪波

北京邮电大学理学院物理实验中心

^[备注]E-mail:phydonglin@gmail.com 电话：13581582394

【摘要】：在本文中，我们对波尔共振实验中的两个“异常现象”进行了研究，研究发现轴承摩擦和弹簧非线性效应是造成阻尼振动实验中出现“异常现象”的主要因素，进一步我们考虑电机转速的不稳定性并指出该因素能够导致受迫振动实验中“异常现象”的出现。文章中修改了原线性动力学方程并给出数值计算结果，很好地分析和解释了实验中的“异常现象”。

【关键词】：扭摆振动；非线性；数值计算；“异常现象”

【Abstract】：In this paper, two unexpected phenomena, got from the experiment--Torsion Pendulum of free and forced rotational oscillations using the Pohl resonance equipment, are analyzed. We found out that mechanical damping and nonlinear effects of coil spring are mainly responsible for the unexpected phenomenon to occur. Furthermore, we pointed out that the unstable driving frequency under some conditions can be possible explanations of the second unexpected phenomenon. After modifying the original linear dynamical equations, we solved the equations numerically and explained the unexpected phenomena successfully.

【Keyword】 Torsion Pendulum; Non-liner Effect; Numerical calculation; Unexpected Phenomenon

1. 前言

在高校实验教学中，波尔共振仪被普遍用于研究扭摆的阻尼振动和受迫振动。我们通过大量反复的实验，观察到了不能用一般线性理论解释的两个**普遍“异常现象”**：

1. 在阻尼振动实验中，固有周期随着阻尼系数的增大而**反而减小**；
2. 在受迫振动实验中，幅频特性曲线共振点对应的 ω_r / ω_0 **有时大于1**。

我们考虑了**轴承摩擦和弹簧非线性**的影响，在原有的阻尼振动方程中加入了两个非线性项，数值结果表明，修正后的动力学方程能够很好的解释第一个“异常现象”；

通过数值分析和实验探索，我们发现即使考虑了轴承摩擦和弹簧非线性的影响，第二个“异常现

象”仍无法得到解释。考虑到电机不可能绝对处于稳定状态，我们对动力学方程进行了进一步修正，结果表明**电机转速的不稳定**会导致第二个“异常现象”的出现。

总而言之，我们很好地分析和解释了实验中的“异常现象”。

文章结构：在第二节中我们简略介绍了文献^[1]的基本模型，第三节详细讨论了实验中如何出现的“异常现象”，第四节对出现的“异常现象”进行了详细的分析和解释，第五节总结实验结论。

2. 动力学的线性理论

本实验使用的是由摆轮、驱动电机和控制装置构成的波尔共振仪，其中摆轮在弹性力矩的作用下，在平衡位附近自由的摆动。

1) 阻尼振动

扭摆的阻尼振动用微分方程描述:

$$m \frac{d^2\theta}{dt^2} + k\theta + \gamma \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (1)$$

其中 $-k\theta$ 为弹簧回复力, $-\gamma \frac{d\theta}{dt}$ 为电磁阻尼力矩。我们不妨设 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $2\beta = \frac{\gamma}{m}$, 则方程(1)变为如下形式:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (2)$$

如果 $\beta < \omega_0$, 解的形式为:

$$\theta = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (3)$$

其中 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, A_0 和 φ_0 是由初始条件所决定的。(3)式中的 $A_0 e^{-\beta t}$ 因子是随时间按指数衰减的振幅, 阻尼振动周期为 $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ 。我们

可以看到随着阻尼 β 的增加振动周期 T 增大。

2) 受迫振动

摆轮实际上是在弹性力矩、阻尼力矩、周期性力矩三者共同作用下的动力学特征由如下方程描述:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -K\theta - B \frac{d\theta}{dt} + M_0 \cos(\omega t) \quad (4)$$

其中 J 是转动惯量, $K\theta$ 是弹性力矩, $B \frac{d\theta}{dt}$ 是实验仪器附加的电磁阻尼力矩, M_0 为外加周期力矩的幅度, ω 是外加周期力矩的角频率。我们不妨

设 $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{J}}$, $2\beta = \frac{B}{J}$, $M = \frac{M_0}{J}$, 则(4)变为:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = M \cos(\omega t) \quad (5)$$

其通解的形式为:

$$\theta = \theta_1 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha) + \theta_2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (6)$$

(6)式的第一项振幅按随时间按指数衰减, 稳定振动的解为:

$$\theta = \theta_2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (7)$$

其中:

$$\theta_2 = \frac{M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (8)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right) \quad (9)$$

共振峰的极大值条件 $\left. \frac{\partial \theta_2}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_r} = 0$ 等价于

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (10)$$

相应的极大值为:

$$\theta_r = \frac{M}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (11)$$

此时

$$|\varphi_r| = \arctan\left(\frac{\omega_r}{\beta}\right) \quad (12)$$

显然有 $\omega_r < \omega_0$ 以及 $|\varphi_r| < \frac{\pi}{2}$

3. 实验中的“异常现象”

1) 扭摆的阻尼振动

在阻尼振动实验中, 我们发现了这样的异常现象: 随着阻尼系数 β 的增加, 阻尼振动周期反而减小。图 1 显示了振动周期随着阻尼系数的增大反而减小的趋势。

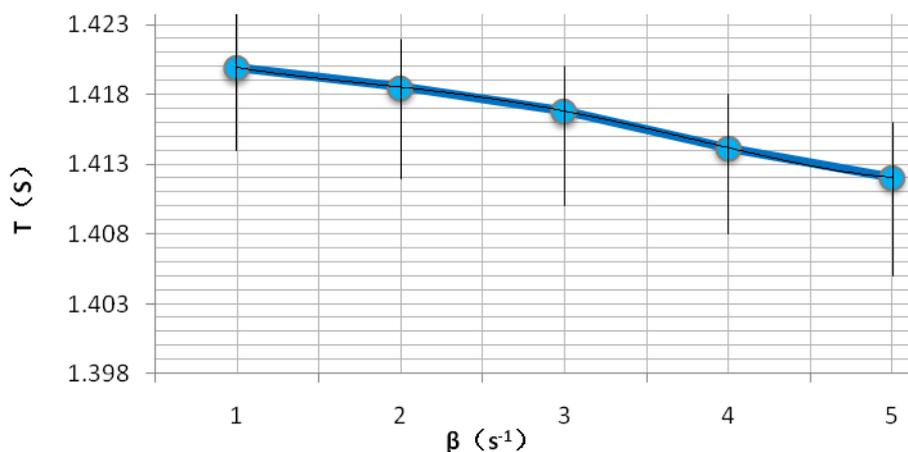


图 1. 电磁阻尼档与振动周期变化关系，图中可以看到随着阻尼系数的增加振动周期反而减小----第一个“异常现象”

2) 扭摆的受迫振动

受迫振动实验主要研究扭摆的幅频特性曲线和相频特性曲线。我们却发现幅频特性曲线共振点对应的 ω_r / ω_0 有时大于 1。表 1 给出了实验中

的结果，可以看出在阻尼三档共振幅值 88 处， ω / ω_0 在相位差为 -86° 时小于 1，而在相位差为 -92° 和 -95° 时大于 1；阻尼四档的情况类似。

表 1 受迫振动测量幅频特性和相频特性曲线实验数据---第二个异常现象			
$\beta = 3$	振幅($^{\circ}$)	相位差($^{\circ}$)	ω/ω_0
	87	-77	0.994792
	87	-81	0.996730
	88	-86	0.998814
	88	-92	1.001748
	88	-95	1.003151
	86	-104	1.006039
	83	-108	1.008163
$\beta = 4$	振幅($^{\circ}$)	相位差($^{\circ}$)	ω/ω_0
	68	-73	0.991761
	69	-78	0.994032
	70	-80	0.995898
	71	-85	0.998536
	71	-91	1.000838
	70	-95	1.003221
	69	-97	1.005686
	68	-105	1.008234

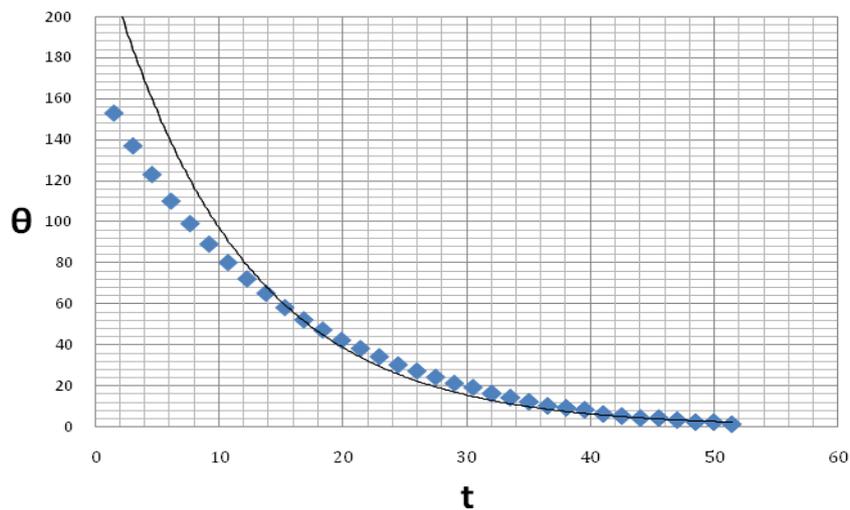


图 2 阻尼振动曲线的指数拟合，散点表示实验结果，曲线表示指数拟合结果。大摆角 ($\theta > 120^{\circ}$) 弹簧非线性效应显著。

4. 对“异常现象”的分析和解释

为了解释实验中的这两个“异常现象”，我们

对实验进一步进行了研究。

1) 阻尼振动：

a) 弹簧非线性效应

我们注意到阻尼振动曲线 $\theta-t$ 的指数拟合在大摆角时偏离较大，指数拟合不甚良好。图 2 中给出摆角关于时间的实验结果和指数拟合，在摆角大于 120° 时，实验结果和指数拟合偏离的尤为显著，由此我们认为在摆角比较大时弹簧的非线性效应比较明显。

为此，我们对实验中用到的卷曲弹簧做了两种理论上的修正，即将弹性系数作为摆角的函数泰勒展开至一阶项，并考虑对称和不对称两种模式：

i. 对称弹簧：

$$T = K_1(\theta)\theta = -(\omega_0^2 + \kappa|\theta|)\theta \quad (13)$$

ii. 非对称弹簧：

$$T = K_2(\theta)\theta = -(\omega_0^2 + \kappa\theta)\theta \quad (14)$$

其中常数 $\kappa > 0$

b) 轴承摩擦的影响

实验中，我们将电磁阻尼置为 0 档，测量摆角关于时间的变化曲线，在所得 $\theta-t$ 曲线中做分段指数拟合（例如在 θ 每变化 10° 的区间内对时间 t 做一次指数拟合，指数值即为的阻尼系数 β ，区间的平均值即为 θ ）。图 3 给出阻尼系数 β 关于摆角 θ 的变化关系：摆角大于 20° 以后阻尼系数基本为一个稳定值，而在小于 20° 的范围内阻尼系数随着 θ 减小而迅速增大。这可以由轴承摩擦的影响来说明：轴承摩擦效应由轴承和轴承之间的静摩擦力产生，在转动速度较小时静摩擦力较大，而在转动速度达到一定的临界值后静摩擦力保持稳定值。我们采用轴承摩擦的一个经验公式

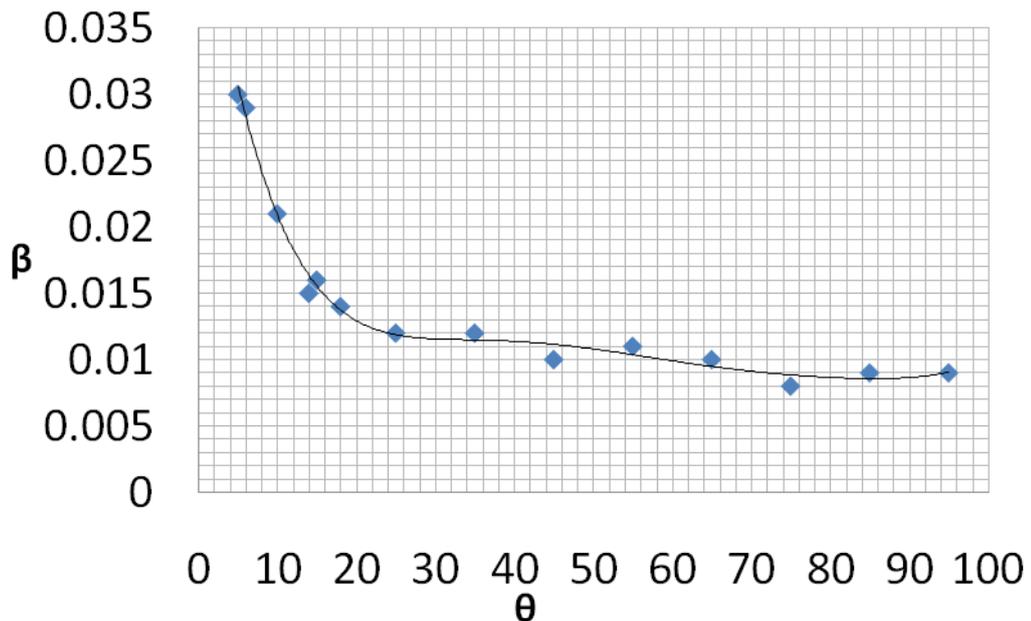


图 3. 将电磁阻尼置为 0 档，测量摆角关于时间的变化曲线，在所得 $\theta-t$ 曲线中做分段指数拟合（例如在 θ 每变化 10° 的区间内对时间 t 做一次指数拟合，指数值即为

的阻尼系数 β ，区间的平均值即为 θ)。图中给出阻尼系数 β 关于摆角 θ 的变化关系：摆角大于 20° 以后阻尼系数基本为一个稳定值，而在小于 20° 的范围内阻尼系数随着 θ 减小而迅速增大。

$$f = a\dot{\theta}^2 - b\dot{\theta} + c \quad (15)$$

来描述静摩擦力矩。其中常系数 $a > 0, b > 0, c > 0$ 并且满足关系： f 随的 $\dot{\theta}$ 增加而逐渐减小并趋于常数值，机械阻尼的影响主要体现在小角度范围内。

将这两个因素加以考虑，并将修正项代入原线性方程(2)中可以得到修正后的非线性方程，分别为：
对称模式：

$$\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + b\dot{\theta}^2 - \omega_0^2\theta - \kappa|\theta|\theta + c \quad (16)$$

不对称模式：

$$\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + b\dot{\theta}^2 - \omega_0^2\theta - \kappa\theta^2 + c \quad (17)$$

我们运用 MATLAB 工具软件中 Runge-Kutta (4, 5) 标准算法对方程(16)和 (17) 进行数值求解。根据实验中的具体情况，我们取参数 $b \approx \beta/100, \omega_0^2 = 18, c = 7$ ，且 $\kappa \approx \omega_0^2/1000$

我们将参数 β 和 κ 同时作为振动周期 τ 的

个独立变量，将数值结果投影到 τ - β 平面分别得到对称模式和不对称模式两种情况，如图 4 所示。

由图 4 可以得出结论：在对称模式下周期 τ 随着 β 的增大而增大，而在不对称模式下周期 τ 随着 β 的增大而减小。与实验中的“异常现象”比照可知卷曲弹簧是不对称的，这在物理上可以这样理解，卷曲弹簧拉伸和压缩的杨氏模量不相同^[5]，从而造成拉伸和压缩的恢复力矩是非对称的，这一点在理论和实验上都有着坚实的基础。

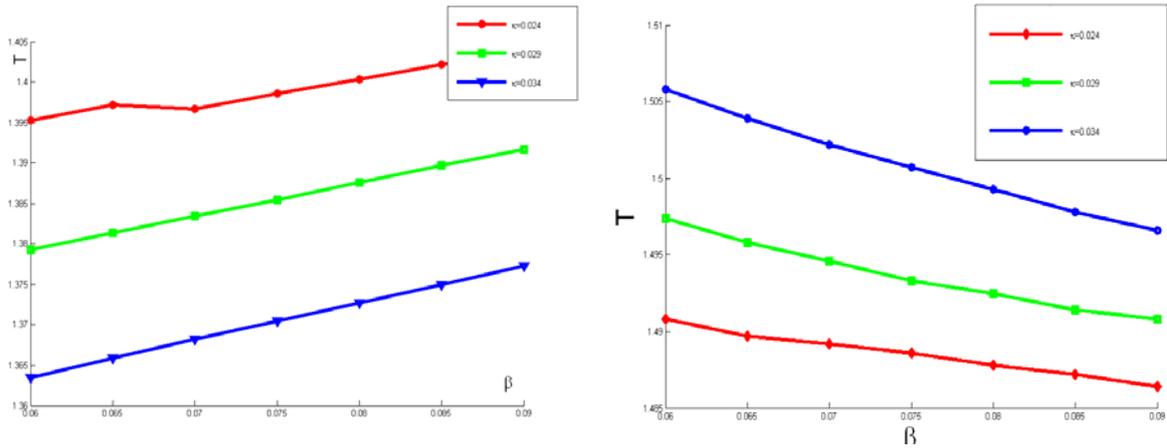


图 4. 对称模式 (A) 和非对称模式 (B) 下, 周期 T 关于阻尼系数 β 的变化曲线, 图中分别画

出了三族曲线对应于 κ 取三个不同的值, 分别为 $\kappa=0.024, 0.029, 0.034$ 。图中可以得出结论,

在对称模式下周期 T 随着 β 的增大而增大, 在非对称模式下周期 T 随着 β 的增大而减小。

2) 受迫振动

a) 稳定驱动

由上面的讨论可知我们应当建立在用弹簧为非对称模式的基础上考虑受迫振动问题, 即在方程(18)中加入周期性驱动力矩 $M \cos(\omega t)$, 这样原有受迫振动方程(19)成为:

$$\ddot{\theta} = -\beta \dot{\theta} + b \dot{\theta}^2 - \omega_0^2 \theta - \kappa \theta^2 + c + M \cos(\omega t) \quad (18)$$

我们仍然用 Runge-Kutta (4, 5) 标准算法求解方程(18), 数值的结果表明: 即使考虑了轴承摩擦和弹簧非线性的影响, 第二个“异常现象”仍无法得到合理的解释。

b) 不稳定驱动

考虑到电机不可能绝对处于稳定状态, 我们对动力学方程进行了进一步的修正。通过厂家提供的信息, 我们得知 **驱动电机转速频率有 1% 的不稳定性**。考虑圆频率两种可能的修正:

i. 电机随机误差修正

$$\omega' = \omega + \varepsilon \quad (19)$$

即其中 ε 是一个大小不超过 0.01ω 的随机数, 在统计上满足均匀分布或正态分布。这等效于假设电机转动处于一个噪声背景之下, 该背景是均匀或正态分布的。图 5 中我们给出了共振点处 ω/ω_0 与 β 的数值结果, 在均匀分布和正态分布的随机误差 ε 的影响下, ω/ω_0 确实出现了有时大于 1 的情况。

ii. 周期性修正

$$\omega' = \omega(1 + \varepsilon \cos \omega qt) \quad (20)$$

其中 ε 是一个大小不超过 0.01ω 的常数, q 一个比例系数, 用于衡量 ω' 相应于 ω 变化的快慢。这等效于假设电机组内部设置有反馈电路, 该反馈电路的作用使得驱动频率随时间做小幅周期性变化。在图 6 中我们给出 ω/ω_0 随着衡量电机转速变化快慢的参量 q 的关系图, 在参数 q 的变化范围 $0.002 \leq q \leq 0.012$ 内我们发现 ω/ω_0 正好越过了 1 的界限, 这说明电机转速变化的快慢确实能够影响 ω/ω_0 取值大小。

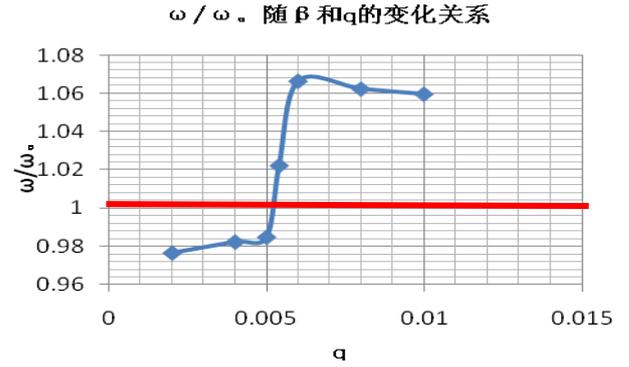


图 6. 共振点处 ω/ω_0 随着衡量电机转速变化快慢的参量 q 的关系图, 在参数 q 的变化范围 $0.002 \leq q \leq 0.012$ 内我们发现 ω/ω_0 正好越过了 1 的界限, 这说明电机转速变化的快慢确实能够影响 ω/ω_0 取值大小。

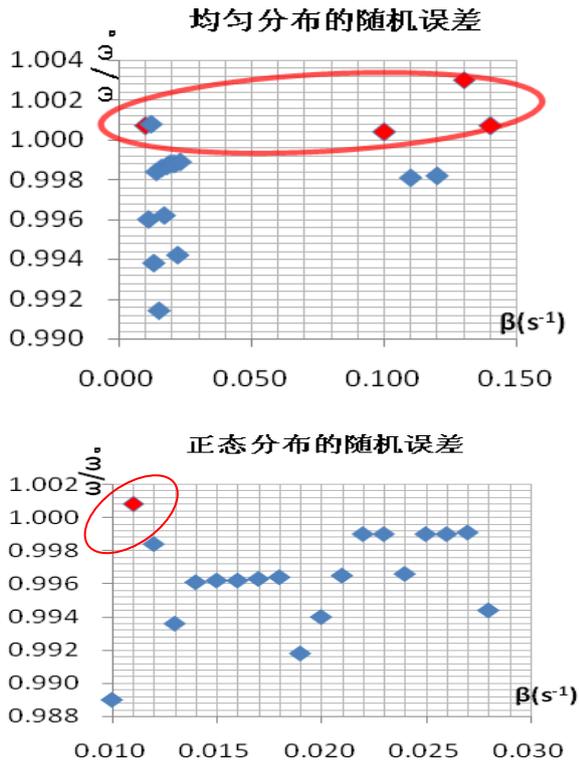


图 5 共振点处 ω/ω_0 与 β 的数值结果, 在均匀分布(A)和正态分布(B)的随机误差 ε 的影响下, ω/ω_0 确实出现了有时大于 1 的情况

5. 结论

在本文中, 我们首先指出波尔共振实验中两个普遍存在的“异常现象”: 1. 阻尼振动实验中, 固有周期随着阻尼系数的增大而**反而减小**; 2. 受迫振动实验中, 幅频特性曲线共振点对应的 ω_r/ω_0 有时大于 1. 我们在考虑**轴承摩擦和弹簧非线性效应**的基础上, 通过数值求解很好地解释了第一个“异常现象”, 轴承摩擦和弹簧非线性效应分别由经验公式(15)和非对称弹簧(14)来描述, 另外我们还详细讨论了卷曲弹簧不能采用对称模式(13)的理论及实验上的依据; 进一步地, 我们发现即使考虑了上述两个因素的影响, 第二个“异常现象”仍无法得到合理的解释。考虑到电机不可能绝对地处于稳定状态, 我们对动力学方程进行了进一步修正, 包括在电机驱动圆频率中加入相对幅值不超过 1% 的均匀、正态和周期性修正

项, 数值结果表明 **电机转速的不稳定** 会导致第二个“异常现象”的出现。

总之, 对“用波尔共振仪研究受迫振动”实验中 **普遍存在** 的两个“异常现象”, 我们做出了很好的分析和解释。

6. 感谢

2007 北京邮电大学校级大学生创新性实验计划项目立项资助。

7. 参考文献

- [1] 肖井华, 蒋达娅, 朱洪波, 陈以方. 大学物理实验[M]. 北京邮电大学出版社, 2007.
- [2] 姚超、林芊芊. 研究波尔共振仪中的机械阻尼

和非线性弹性力矩[J] (待发表)

- [3] LD physics leaflet Torsion Pendulum experiment, http://www.leybold-didactic.de/literatur/hb/p_index_e.html

- [4] 张才国. 非线性受迫振动振幅跳跃现象讨论[J] 五邑大学学报(自然科学)版, 2005.

- [5] Horst Stocker, 吴锡真等译, 物理手册[M], 北京大学出版社, 2004,

- [6] 上海同济科教技术物资有限公司, ZKY-BG 波尔共振仪实验指导说明书[M]