

2013 年北京市大学生物理实验竞赛

参赛项目说明书

参赛学校 北京邮电大学

组队负责人 罗武

组队成员 缪葱葱，马雅琪

参赛题目：（请画√选择）

- 题目一：机械摆的设计、制作及实验研究
- 题目二：霍尔元件物理特性研究及应用
- 题目三：实验制作
- 题目四：论文（教学型 科研型）

北京市大学生物理实验竞赛组委会制

2013 年 5 月

参赛题目	用波尔共振仪研究非线性振动			
负责人姓名	性别	出生年月	专业	年级
罗武	男	1994.09	信息与通信工程 学院	2011
手机, email	手机: 18810541485 email: lwyeluo@163.com			
队员姓名	性别	出生年月	专业	年级
缪葱葱	男	1993.04	信息与通信工程 学院	2011
马雅琪	女	1993.02	电子工程学院	2011

一. 设计原理与方法:

1.1 国内仪器

波尔共振仪平面图如下图所示:

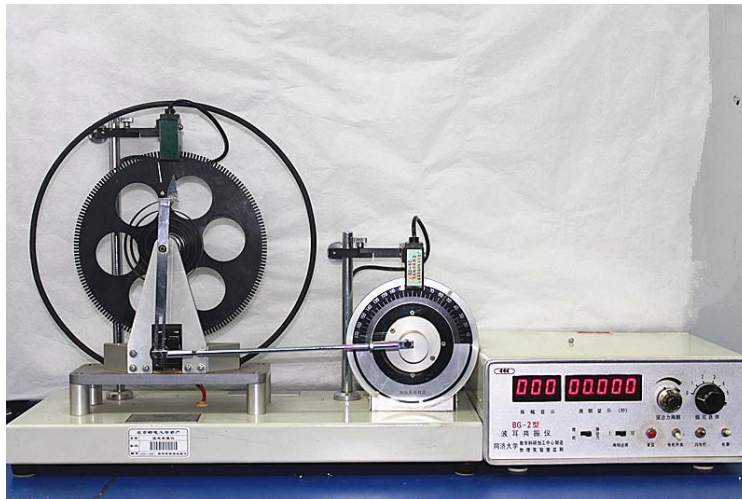


图1 波尔共振仪实图

当摆轮受到周期性强迫外力矩 $M = M_0 \cos \omega t$ 的作用, 并在有空气阻尼和电磁阻尼的媒质中运动时 (阻尼力矩为 $-b \frac{d\theta}{dt}$) 其运动方程为

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -k\theta - b \frac{d\theta}{dt} + M_0 \cos \omega t \quad (1)$$

式中, J 为摆轮的转动惯量, $-k\theta$ 为弹性力矩, M_0 为强迫力矩的幅值, ω 为强

迫力的圆频率。

$$\text{令 } \omega_0 = \frac{k}{J}, \quad 2\beta = \frac{b}{J}, \quad m = \frac{m_0}{J}$$

则式 (1) 变为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = m \cos \omega t \quad (2)$$

当 $m \cos \omega t = 0$ 时, 式 (2) 即为阻尼振动方程。

当 $\beta = 0$, 即在无阻尼情况时式 (2) 变为简谐振动方程, ω_0 即为系统的固有频率。

方程 (2) 的通解为

$$\theta = \theta_1 e^{-\beta t} \cos(\omega_f t + \alpha) + \theta_2 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (3)$$

由式 (3) 可见, 受迫振动可分成两部分:

第一部分, $\theta_1 e^{-\beta t} \cos(\omega_f t + \alpha)$ 表示阻尼振动, 经过一定时间后衰减消失。

第二部分, 说明强迫力矩对摆轮做功, 向振动体传送能量, 最后达到一个稳定的正弦振动状态 $\theta_2 \cos(\omega t + \varphi_0)$ 。

1.2 国外仪器

我们又搜了一些用国外 Leybold 仪器测量扭摆的非线性振动的实验, 其仪器实图如下:

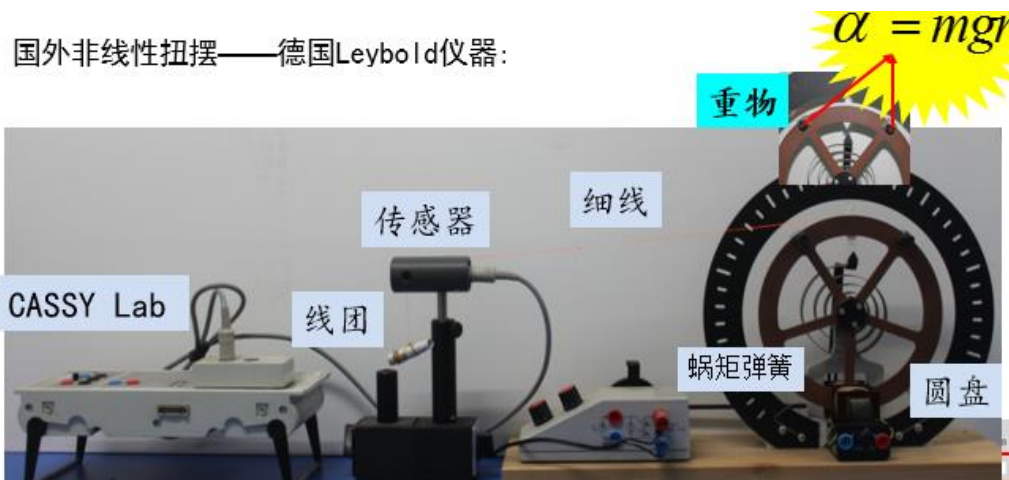


图2 Leybold 仪器实图

它测量角度的方法是将细线缠绕在扭摆的圆形铜盘上，线团绕过滑轮自然下垂。当扭摆摆动时，细线随之发生位移，光电门感应位移的大小，并将感应信号输入至 CASSY Lab 模数转换器中，经模数变换后，数字信号被输入到计算机中，使用 CASSY Lab 软件实时画出波形图和相图。同时，莱宝仪器可通过在摆轮上增加重物引入非线性因素，其动力学方程如下：

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + k\theta = M_0 \cos \omega t + \alpha' \sin \theta \quad (4)$$

与线性方程相比，多了重力矩 $\alpha' \sin \theta$ ，其中 $\alpha' = rmg$ 。

当摆角很小时， $\sin \theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}$ ，这就引入了非线性因素。当角度变大时，方程中还会出现5次方、7次方项，是导致混沌运动的主要原因。

虽说莱宝仪器能够产生并且测量摆轮的非线性振动，但是它也有一些美中不足的地方比如说价格昂贵，误差比较大等。由于莱宝仪器加上的重物不可调，所以在莱宝仪器上面有所突破时非常困难的。

1.3 实验中研究以下三个问题

- 研究波尔共振仪在每一时刻振动的现象，并画出在不同阻尼情况以及不同强迫力周期情况下的曲线图
- 研究波尔共振仪振动的情况，包括阻尼振动、受迫振动等线性振动的基础上，施加配重（一根细铁杆以及若干螺母）构造非线性扭摆，改变的是杆的长度、螺母的个数以及螺母的高度，并用 OPENCV 软件采集系统采集出其现象
- 丰富动力学图形：改变电机驱动频率，调出二分频，四分频以及混沌的运动状态，用软件采集，画出时序图和相图。调节螺母位置，画出不同位置情况下的幅频特性曲线

二. 实验仪器与装置：

我们在国内波尔共振仪基础上进行一些改装：在摆轮的最上方配置一根细铁杆以及螺母增加非线性，即可构造一个非线性扭摆，使配重的总效果加在 0 轴正上方，则扭摆在 0 轴正上方存在一个不稳定平衡位置，在 0 轴左右两侧各存在一个稳定平衡位置。

下图为实验装置图：

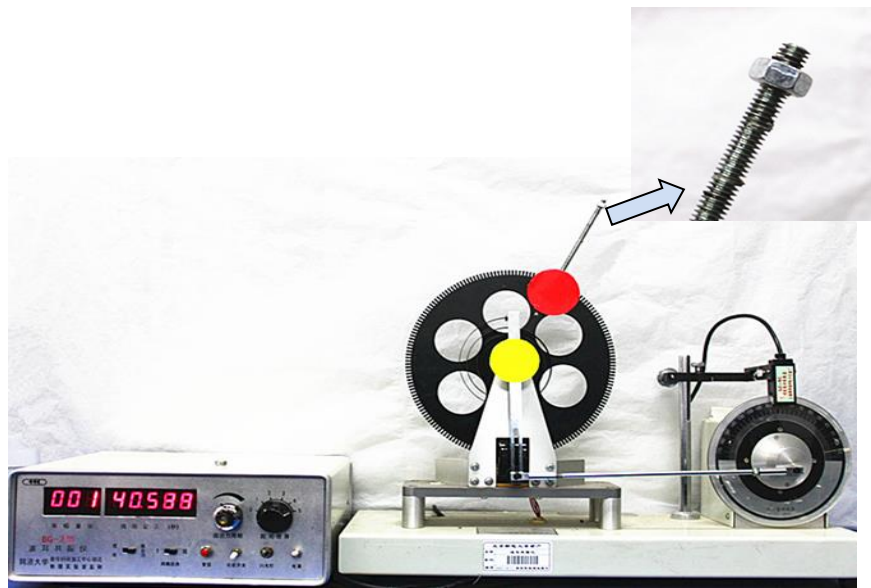


图3 改装后波尔共振仪实图

改装后仪器与 Leybold 仪器对比：

表1 仪器对比

对比	德国 Leybold 非线性扭摆	改进版波尔共振仪
价格	7000 美元	4000+2 元
误差	外挂传感线，相当于增加了一个很大的噪声，每时每刻都会产生干扰	存在较小的系统误差
调节精度	只能粗略改变重物大小	可以旋转螺母位置连续调节重力矩
波形图		

三. 数据测量与分析:

3.1 数据采集

下图为采集程序截图:

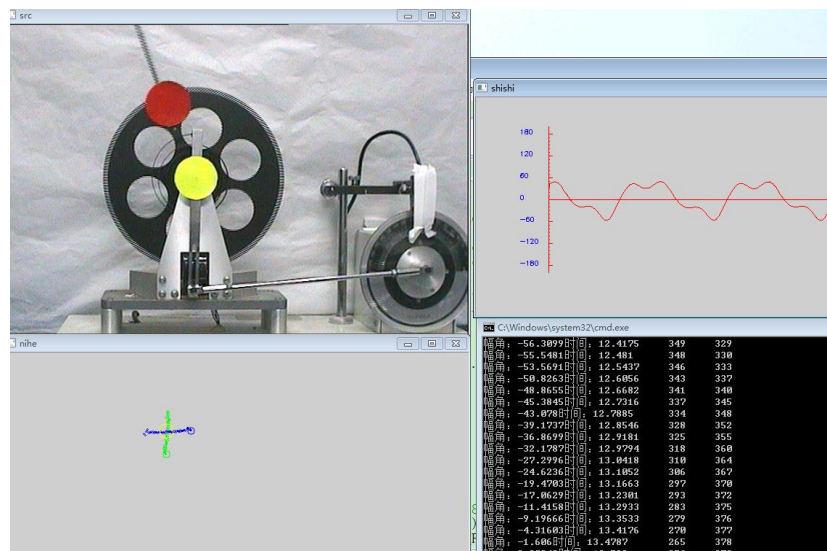


图4 采集程序截图

左上角为仪器的实时图像，它是通过摄像头采集，经过 opencv 平台图像识别得到的，左下角是摆轮边缘红圆的水平直径与垂直直径，右上角则是计算摆角得到的实时时序图，每一次是绘出了 400 个点，右下角为得到数据的时间以及幅角。

当然，我们采集历程也不是一帆风顺的。我们起初决定采用图像识别后，首先的想法就是在摆轮边缘与圆心之间贴一矩形条，匹配像素点后直接最小二乘法拟合得到斜率，但是结果偏差 10 度左右。然后我们考虑圆的对称性，一开始采用的是提取轮廓、拟合圆得到圆心，但摄像头两帧之间拖尾现象使得偏差在 5 度左右，为了削弱这种现象的影响，我们提取水平直径与垂直直径，取平均值得到圆心，这样偏差基本稳定在 1 度左右。至于数据处理，则通过 matlab 插值拟合得到。

下面分别是前后不同算法得到的图形，显然，右侧图像更加光滑。

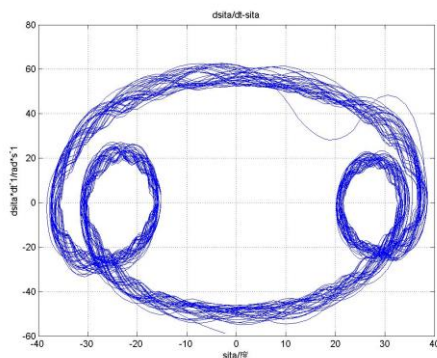


图 5 提取轮廓得到的四态相图

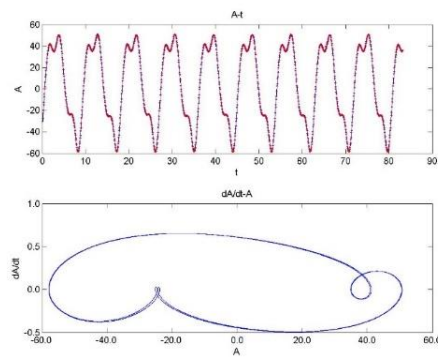


图 6 提取直径拟合数据得到的四态相图

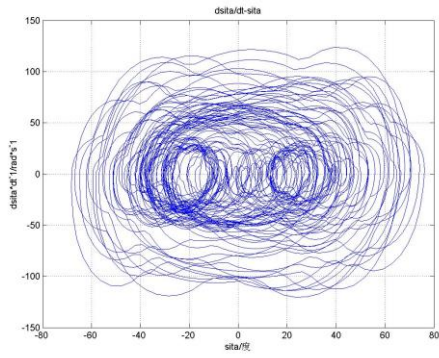


图7 提取轮廓得到的混沌相图

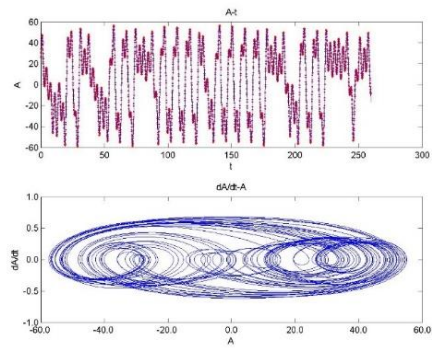


图8 提取直径拟合数据得到的混沌相图

3.2 实验结果

下面是杆上没有螺母以及螺母在杆上不同位置的幅频特性曲线：

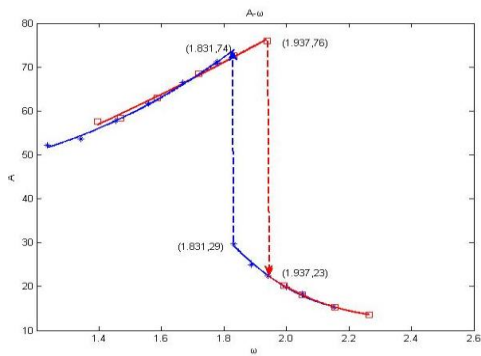


图9 无螺母幅频曲线

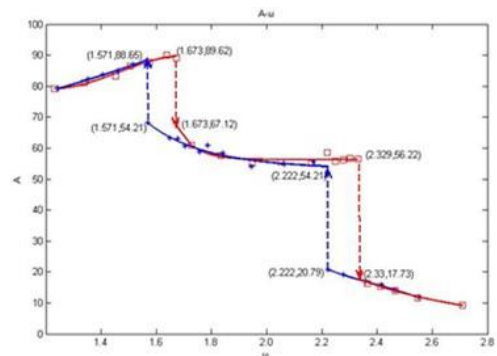


图10 一螺母：距顶端0螺纹处幅频曲线

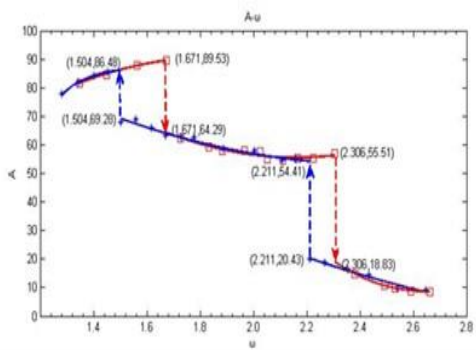


图 11 一螺母：距顶端 6 螺纹处幅频曲线

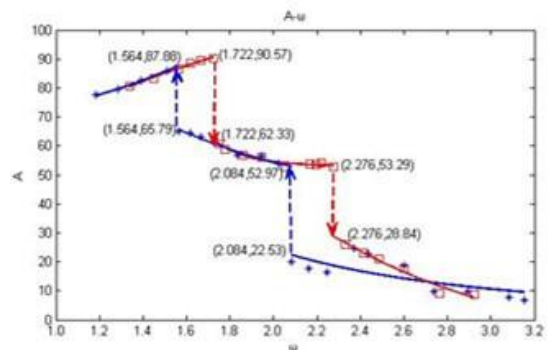


图 12 一螺母：距顶端 12 螺纹处幅频曲线

我们的实验完全重现了从正弦到倍周期分岔、最后走向混沌的整个过程。具体各点图像参照附录（无螺母处参照附录一，一螺母 6 螺母处参照附录二），以下仅贴出混沌、四态、二态、周期一态图形。

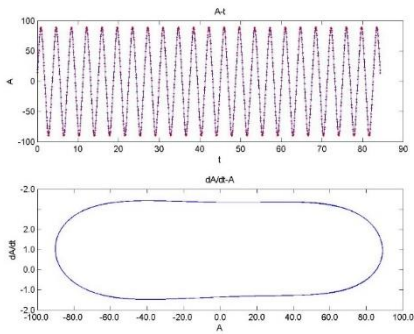


图 13 一螺母 6 螺母处周期一态

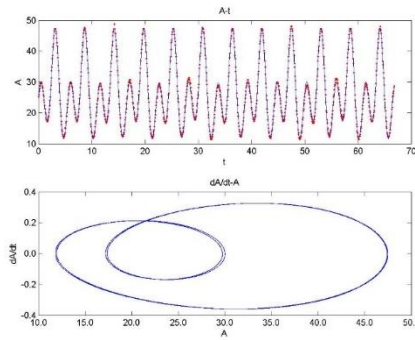


图 14 一螺母 6 螺母处周期二态

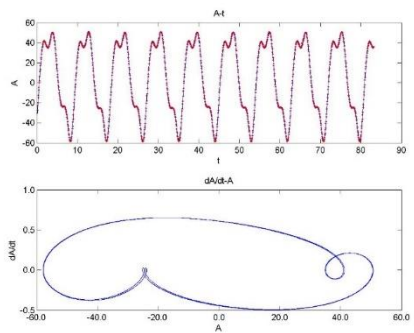


图 15 一螺母 6 螺母处周期四态

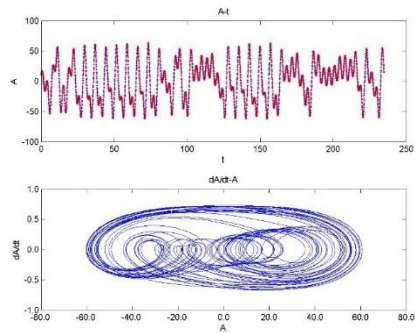


图 16 一螺母 6 螺母处混沌

四. 结论:

- ❖ 在国内波尔共振仪基础上借助于增加杆与旋转螺母这种巧妙的方法得到了丰富的动力学图形,而且这是国内首创
- ❖ 实验装置经济、简单,但却能够看到德国 Leybold 仪器所能得到的所有现象
- ❖ 通过改变测量方案得到了比德国莱宝更加光滑美观的时序图与相图

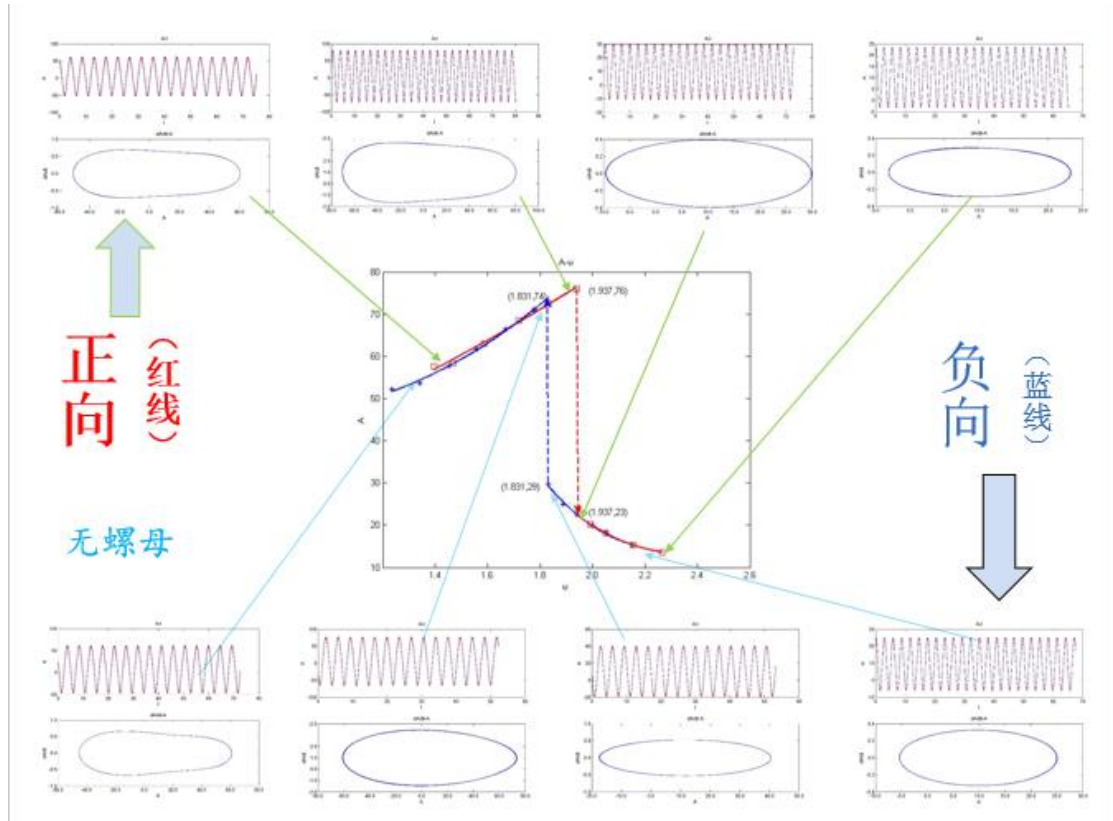
我们还可以利用简单的装置,做其它很多有意义的工作:

- ❖ 不同的螺母位置下可以测量出现混沌的区间,可以得到混沌区间与外力矩的关系
- ❖ 并联适当阻值的电位器,从而可以微调驱动频率,得到八态以及更复杂的运动规律,进一步丰富运动学图形
- ❖ 走进学校,用于大学生教学实验,让更多多的学生接触混沌,探索混沌的世界

五. 制作成本(明细)

铁杆与螺母: 2 元。

附录一： 无螺母幅频曲线各点图形



附录二： 一螺母： 6 螺纹处幅频曲线各点图形

