

## RLD 混沌电路倍周期分岔的研究

李新 崔雪亮 李海红

(北京邮电大学物理实验中心 北京 100876)

**摘要：**在前人对混沌电路研究的基础上，对 R L D 混沌电路倍周期分岔进行了研究。本文着重对实验电路、实验仪器进行介绍，并对费根鲍姆常数进行计算验证等等。在实验所得数据的基础上，给出分岔示意图。该实验设计简单巧妙，成本低，且操作十分方便。

**关键词：**混沌，倍周期分岔，费根鲍姆常数

### 引言

自 1963 年美国麻省理工学院的气象学家洛仑兹首先采用计算机数值法研究气象学的混沌问题以来，人们对混沌的研究不断深入。混沌在学科上属于非线性动力学，是指在确定性系统中出现的某种貌似随机状态的不规则运动过程，这种非周期运动对初始条件极其敏感。确定性系统具有的内在随机性是混沌现象出现的重要特性。近些年来，混沌的控制、应用日益普及，在化学、生物、经济等各非线性系统中有着广泛的应用。近年来对混沌的研究逐渐被引入到教学、实验和演示课程中。本实验采用的是一个非常简单的非线性电路，RLD 电路，通过改变该电路中信号源电压的频率及幅度，可获得倍周期分岔、阵发混沌、奇异吸引子、双吸引子等相图。在观察相图的基础上，计算其倍周期分岔对应的费根鲍姆常数，对混沌现象进行分析。

### 1. 倍周期分岔

倍周期分岔是许多非线性动力学过程中常见的现象，也是进入混沌的一种重要方式。以非线性动力学系统中比较典型的平方映射为例，其方程为： $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$ 。随着参数  $\mu$  值的增长，平方映射发生一系列的倍周期分岔，如图 1 所示，在  $\mu = 3$  处开始了倍周期分岔：

- 3.000 <  $\mu$  < 3.4495 ， 二周期循环 ；
- 3.4496 <  $\mu$  < 3.5441 ， 四周期循环 ；
- 3.5441 <  $\mu$  < 3.5644 ， 八周期循环 ；
- 3.5644 <  $\mu$  < 3.5688 ， 十六周期循环

.....

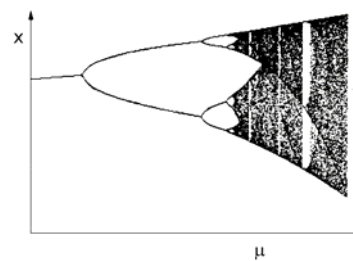


图 1 平方映射倍周期分岔图

如此一直分岔下去，每次分岔运动周期增加一倍，直到  $\mu = \mu_c$  为止。此后迭代得到的值随机地出现，进入混沌运动。

### 2. 费根鲍姆常数：

设  $\mu_n$  为第  $n$  次分岔的  $\mu$  值，则相继两次分岔的间隔之比  $\delta$  趋于一个常数，被称为费根鲍姆常数。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = \delta = 4.6692 \quad (1)$$

\*李新,崔雪亮,北京邮电大学信息工程学院 2004 级本科生,指导教师:李海红 Email: haihonglee@gmail.com

费根鲍姆常数反映了非线性系统沿倍周期分岔系列通向混沌的过程所具有的普适特性，因而在非线性动力学中具有非常重要的意义。本实验将重点对 RLD 实验电路的费根鲍姆常数进行研究。

### 3. 电路介绍

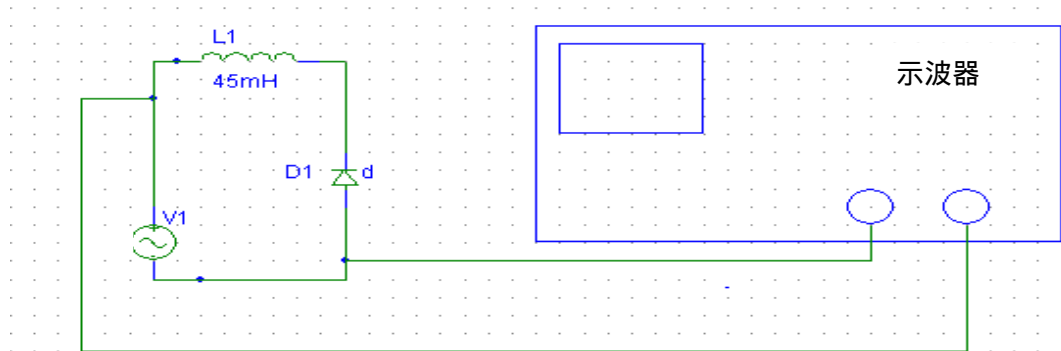


图 2 实验电路图

实验电路如图 2 所示，电路由信号发生器（v1）和一个电感（L1）及二极管（D1）组成，其中，电感  $L=47\text{mH}$ 。我们用信号发生器为电路提供周期信号，用示波器观察如图所示两处位置的电压信号，选择显示李萨如图形。当调节信号发生器所提供正弦信号的电压幅度或频率时，在示波器上我们就可以观察到这一简单电路所实现的倍周期分岔、阵发混沌、奇异吸引子等丰富的物理现象。

### 4. 实验数据及处理

当调节信号发生器所提供正弦信号的电压幅度或频率时，示波器上观察到的倍周期分岔及混沌现象，如图 3 所示。

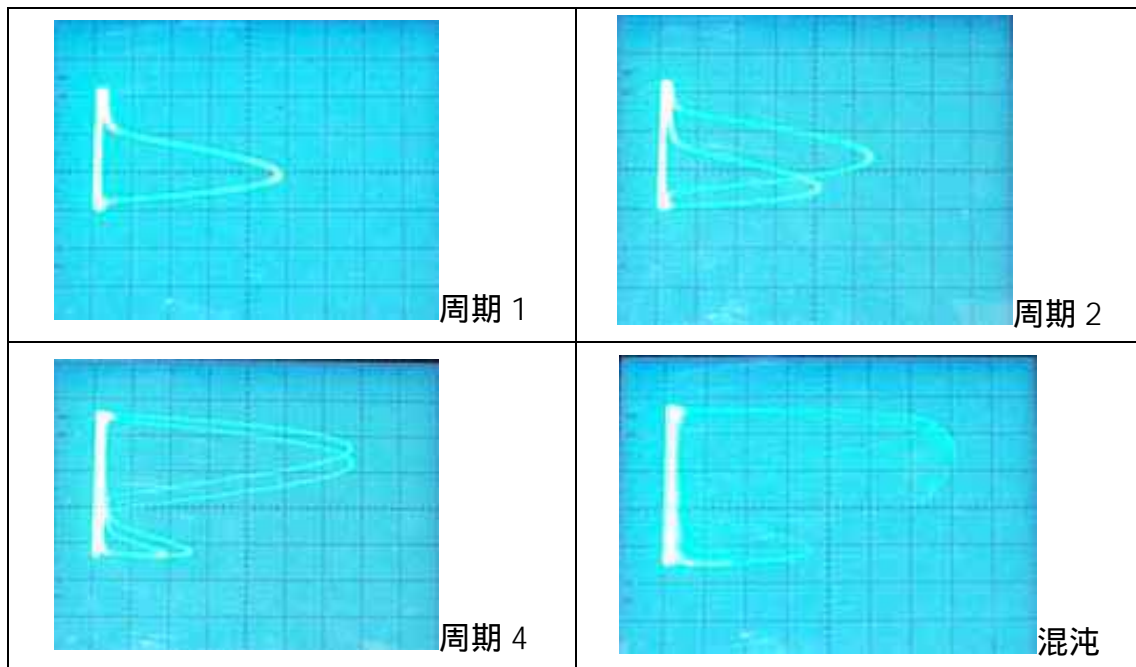


图 3 示波器上观察到的倍周期分岔及混沌现象

其分岔随信号参数改变示意图如图 4.

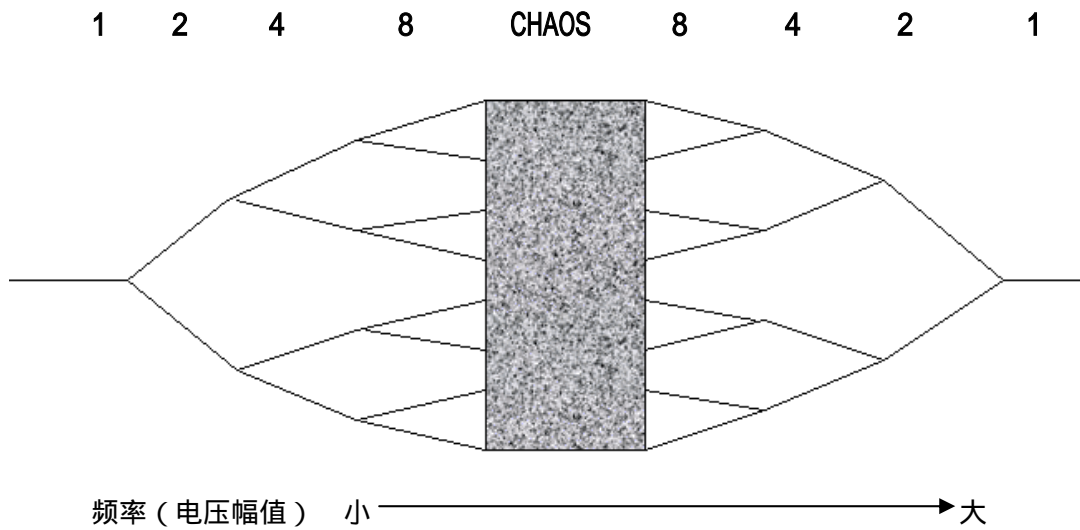


图 4 实验中被周期分岔示意图

实验数据分别在固定信号频率调节幅度和固定信号幅度调节频率两种情况下进行记录（说明：实验中谈到的幅度均为输入电压的峰峰值）。实验中，由于受信号发生器细调范围较小，不易控制，故所得数据最多只到八周期变至十六周期，更高的倍周期分岔不再讨论。

a. 固定信号频率为 20KHz，调节幅度

周期变化	P1 P2	P2 P4	P4 P8	P8 P16
电压峰峰值 (V)	2.17	2.71	2.84	2.87

$$\delta_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_4 - \mu_2} = \frac{2.71 - 2.17}{2.83 - 2.71} = 4.50$$

$$\delta_2 = \frac{\mu_4 - \mu_2}{\mu_8 - \mu_4} = \frac{2.83 - 2.71}{2.87 - 2.83} = 3.00$$

b. 固定信号频率为 30KHz 调节幅度

周期变化	P1 P2	P2 P4	P4 P8	P8 P16
电压峰峰值 (V)	3.86	4.45	4.59	4.63

$$\delta_3 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_4 - \mu_2} = \frac{4.45 - 3.86}{4.59 - 4.45} = 4.21$$

$$\delta_4 = \frac{\mu_4 - \mu_2}{\mu_8 - \mu_4} = \frac{4.59 - 4.45}{4.63 - 4.59} = 3.50$$

c. 固定信号幅度为 4V 调节频率

周期变化	P1 P2	P2 P4	P4 P8	P8 P16
频率 (khz)	48.21	56.18	57.83	58.24

$$\delta_5 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_4 - \mu_2} = \frac{56.18 - 48.21}{57.83 - 56.18} = 4.830$$

$$\delta_6 = \frac{\mu_4 - \mu_2}{\mu_8 - \mu_4} = \frac{57.83 - 56.18}{58.24 - 57.83} = 4.024$$

d. 固定信号幅度为 5V 调节频率

周期变化	P1 P2	P2 P4	P4 P8	P8 P16
频率 ( khz )	38.50	42.89	43.67	43.82

$$\delta_7 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_4 - \mu_2} = \frac{42.89 - 38.50}{43.67 - 42.89} = 5.628$$

$$\delta_8 = \frac{\mu_4 - \mu_2}{\mu_8 - \mu_4} = \frac{43.67 - 42.89}{43.82 - 43.67} = 5.200$$

对以上情况下所求费根鲍姆常数取平均值:

$$\bar{\delta} = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6 + \delta_7 + \delta_8}{8} = 4.36$$

$$u_r = \frac{(\delta_{\text{理论}} - \bar{\delta})}{\delta_{\text{理论}}} \times 100\% = 6\%$$

### 5. 实验结果分析:

在实验所得数据的基础上,根据其中的一些数据分别计算了费根鲍姆常数,所得结果基本分布在理论值附近,相对误差为 6%,从这方面来说,实验结果是具有参考价值的.下面分析一下产生测量误差的主要原因:

一方面是由于实验所用器材的局限性所致.实验当中用到的示波器无法十分精确的对混沌图像进行观测分析,这种仪器误差的存在必然会对实验结果造成一定影响.

另一方面是对分岔界限判断的不精确,这具有人为原因,为将这种误差缩短到最小,在测量的过程中我们对每一种波形状态的出现都进行了两次读数,然后取其平均值以减小误差.

### 6. 结论

本文提出了一种简单的实验方法,利用RLD电路实现对混沌现象及倍周期分岔现象的观察.通过研究发现,该实验电路结构简单,现象丰富,利于在实验室环境下实现.我们认为,这是一个很好的现代化普物实验,该实验具备了以下几个方面的优点:1)实验的内容涉及科学前沿问题,开拓学生的视野,激发其学习兴趣;2)该实验有着丰富的现代化物理内容及实验现象,且为低年级本科生所能接受;3)实验所用电子元件价格低廉,不易损坏.总之,该实验适合作为基础物理实验在高校为低年级本科生开设.

### 参考文献:

- [1] 肖井华,蒋达娅,陈以方,董淑香等.大学物理实验教程.北京邮电大学出版社.2005
- [2] 孙敬姝,李志有等,将科研成果及时转化成演示实验教学的实践,物理实验[J],第23卷,第5期,2003:30.
- [3] 牛武,基于非线性电阻的RLC混沌电路实验分析,物理实验[J],第21卷,第11期,2001:11.
- [4] Renato Mariz de Moraes and Steven M. Anlage, Unified model and reverse recovery nonlinearities of the driven diode resonator, PHYSICAL REVIEW E[J] 68, 026201 (2003).
- [5] Satoshi Tanaka, Shin-ichi Higuchi, and Takashi Matsumoto, Sheet structure in global bifurcations of a driven R-L-diode circuit, PHYSICAL REVIEW E[J] 54, 6, 54(1996).

# **The exploration on periodic bifurcation in RLD chaos circuit**

Li-Xin Cui-Xunliang Li-Haihong

**(The laboratory center of physics, Beijing University of Posts and  
Telecommunications, Beijing, 100876)**

Abstract: Based on the study of chaos circuits, periodic bifurcation in RLD chaos circuit is explored. We stress on the introduction of experiment circuit the testing of Feigenbaum constant. According to experiment data, the bifurcation sketch map is provided. This experiment's design is smart and convenient with low cost.

Key words: chaos, periodic bifurcation, Feigenbaum constant